Geometria iperbolica 08-04

S superficie orientata $\quad MCG(S) = \dfrac{Diffeo^+(S)}{\text{isotopia}}$

Def: Sia $\gamma \subset S$ una curva semplice chiusa non banale

Il <u>Dehn twist</u> di S lungo γ è l'elemento di $MCG(S)$ così definito:

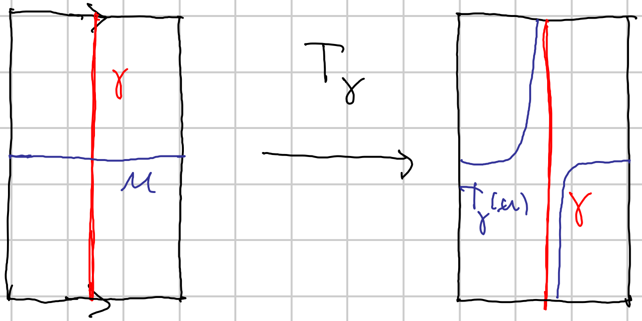
1. Scegliamo U intorno regolare chiuso di γ e un diffeo orientation-pres di U con $S^1 \times [1,1]$, con $\gamma = S^1 \times \{0\}$

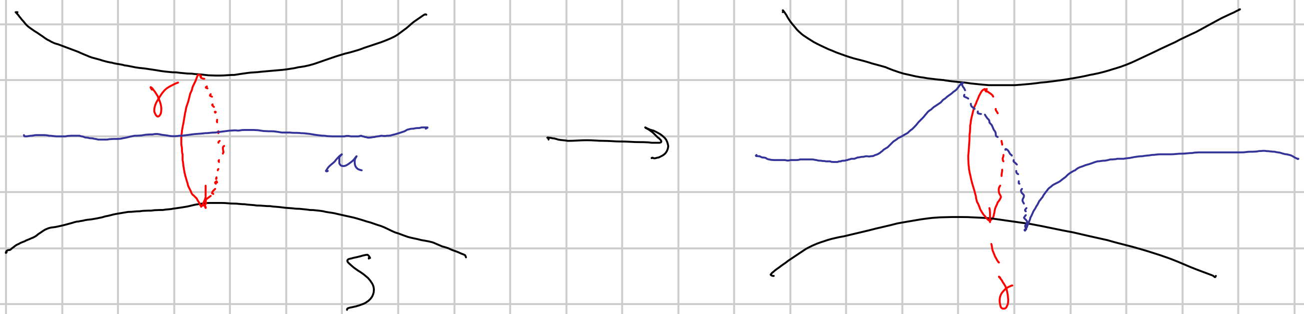
② Scegliamo $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ liscia tale che $f(x) = 0 \quad \forall x \in [-1, -\frac{1}{2}]$

$f(x) = 2\pi \quad \forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$

③ Sia $T_\gamma : S \to S$ il diffeomorfismo che agisce come

$T_\gamma (e^{i\alpha}, t) = (e^{i(\alpha + f(t))}, t)$ su U e come l'identità su $S \setminus U$.





Prop: $T_\gamma \in MCG(S)$ è ben definito e dipende solo dalla classe di isotopia di γ.

Dim: Abbiamo fatto le seguenti scelte:

1. Intorno regolare U di γ
2. Un diffeo$^+$ fra U e $S^1 \times [-1,1]$

③ La funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$

① Due diversi intorni regolari di γ sono isotopi tramite isotopia ambiente.

② Possiamo fissare un'identificazione qualsiasi

③ Due diverse funzioni f_1, f_2 sono omotope a estremi fissati.

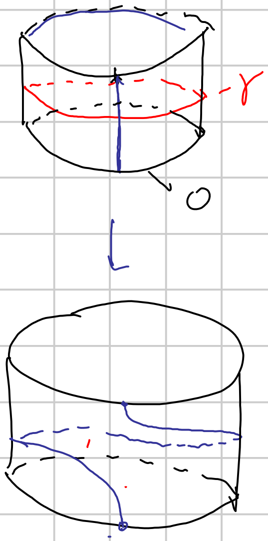
Se γ è isotopa a γ', T_γ e $T_{\gamma'}$ sono isotopi.

Prop: $T_a = T_b \iff a$ è isotopa a b.

$i(a,b) = 0 \iff T_a(b) = b \iff T_a T_b = T_b T_a$

intersezione geometrica

I Dehn twist hanno ordine infinito.



$$MCG(S^1\times[-1,1]) = \frac{\{\varphi\in \mathrm{Diffeo}(S^1\times I) \mid \varphi(x)=x \ \forall x\in\partial S^1\times I\}}{\text{Isotopia relativa al bordo}}$$

$$\cong \mathbb{Z} \ldots$$

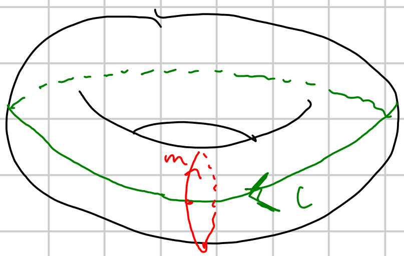
Esempio: $S = T^2 = S^1\times S^1$.

$MCG(T^2) = Aut^+(H_1(T^2, \mathbb{Z}))$

Scegliamo m e l meridiano e longitudine curve semplici chiuse orientate

$m \cdot l = +1$

intersezione algebrica.

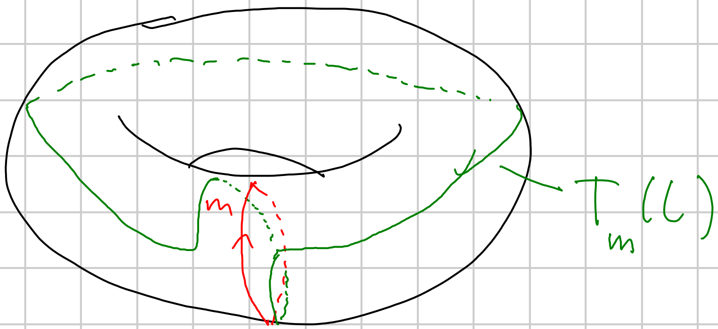


La scelta di m e l identifica $H_1(T^2, \mathbb{Z})$ con $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad l = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) Identifichiamo $MCG(T)$ con $SL_2(\mathbb{Z})$ tale

$$T_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



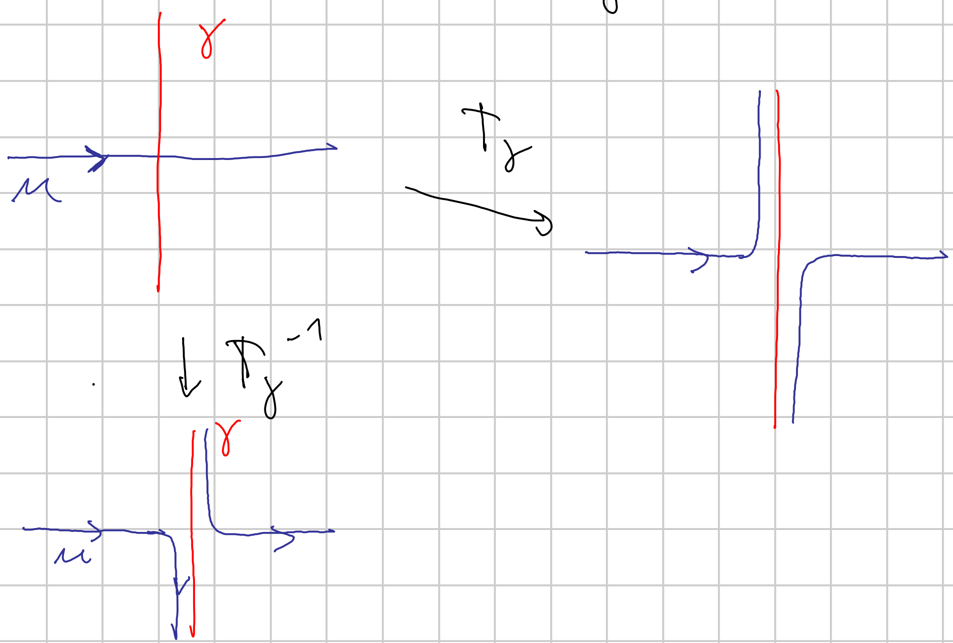
Dim: $T_m(m) = m$

$T_m(l) = l - m$

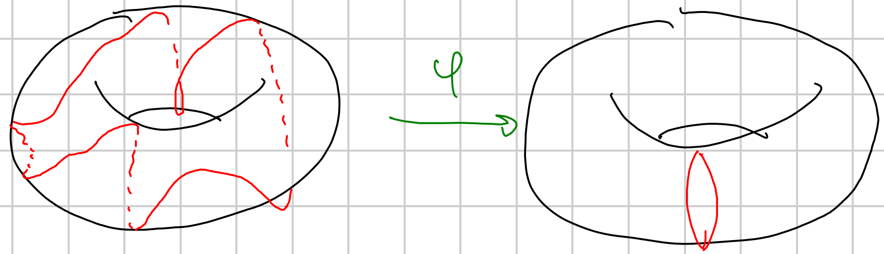
Similmente $T_l(l) = l$, $T_l(m) = m + l$

Oss: La definizione di T_γ dipende dall'orientazione di S ma non dall'orientazione di γ. T_γ = Dehn twist positivo lungo γ

T_γ^{-1} = Dehn twist negativo



Oss: Nel toro esiste un'unica curva semplice chiusa non banale a meno di diffeomorfismo.



Ogni due Dehn twist T_a e T_b nel toro sono coniugati nel $MCG(T)$.

Falso per superfici di genere più alto.

Corollario: Un elemento $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ rappresenta un Dehn twist (positivo o negativo) $\Leftrightarrow$ A è primitivo e $tr(A) = 2$

↳ non è una potenza non banale

Dim: Ogni tale matrice A è coniugata in $SL_2(\mathbb{Z})$ a $\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Potenze di Dehn twist: sono le matrici coniugate a $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Osservazione: Se $S = T^2$

T_m e T_l generano $MCG(T^2)$. Poiché $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ generano $SL_2(\mathbb{Z})$

Teo: Data $S = S_{g,b}$ superficie compatta. $MCG(S)$ è generato da un numero finito di Dehn twist. (Dehn-Lickorish)

Inoltre $MCG(S)$ è finitamente presentato. Cap. 4 Farb-Margalit
"A primer on the mapping class group".

- Spazio di Teichmuller.

$S = S_{g,n}$ t.c. $\partial S = \phi$, $\chi(S) < 0$.

$Teich(S)$ è uno spazio che parametrizza le strutture iperboliche su S.

Def: $\mathrm{Teich}(S) = \dfrac{\text{Metriche iperboliche su } S}{\mathrm{Diff}_0(S)}$ – complete e di area finita.

$\mathrm{Diff}_0(S) = \{ \varphi : S \to S$ diffeomorfismi $\mid \varphi$ isotopo all'identità$\}$.

$\mathrm{Diff}_0(S)$ agisce su lo spazio delle metriche iperboliche tramite push-forward

Def: $\dfrac{\mathrm{HypMet}(S)}{\mathrm{Diff}^+(S)} = \mathrm{Mod}(S)$ - spazio dei moduli di S.

Def: Azione di $MCG(S)$ su $Teich(S)$.

Sia g il tensore metrico associato a una metrica iperbolica su S.

$\varphi: S \to S$ diffeo. φ definisce un nuovo tensore metrico tramite push-forward.

$\varphi_* g$

$$\boxed{(\varphi_* g)_{\varphi(x)}(d\varphi_x(v), d\varphi_x(w)) = g_x(v, w)}$$

Notiamo che se g varia tramite isotopia, anche $\varphi_*(g)$ varia tramite isotopia.

Quindi φ agisce su $Teich(S)$

$$\begin{aligned} Teich(S) &\longrightarrow Teich(S) \\ [g] &\longmapsto [\varphi_* g] \end{aligned}$$

Inoltre variando φ tramite isotopia si ottengono metriche isotope:

Se φ_1 è isotopa a φ_2

$\varphi_{1*}g$ è isotopo a $\varphi_{2*}g$.

Pertanto è ben definita un'azione di $MCG(S)$ su $Teich(S)$,

$$\underset{MCG(S)}{\underset{\cap}{[\varphi]}} \cdot \Big(\underset{Teich(S)}{\underset{\cap}{[g]}}\Big) = [\varphi_* g], \qquad \text{e} \quad Mod(S) = {}^{Teich(S)}\!\big/_{MCG(S)}.$$

Caso $S = T^2$ $\quad \mathrm{Teich}(T) = \dfrac{\{\text{Metriche piatte su } T \text{ con area } 1\}}{\text{isotopia}}$

Esempio: $\mathrm{Teich}(T^2) \cong \mathbb{H}^2$.

Dim: Ogni toro piatto è isomorfo $\mathbb{R}^2/\Gamma = \mathbb{C}/\Gamma$, dove $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$ è un reticolo in $\mathbb{C}$.

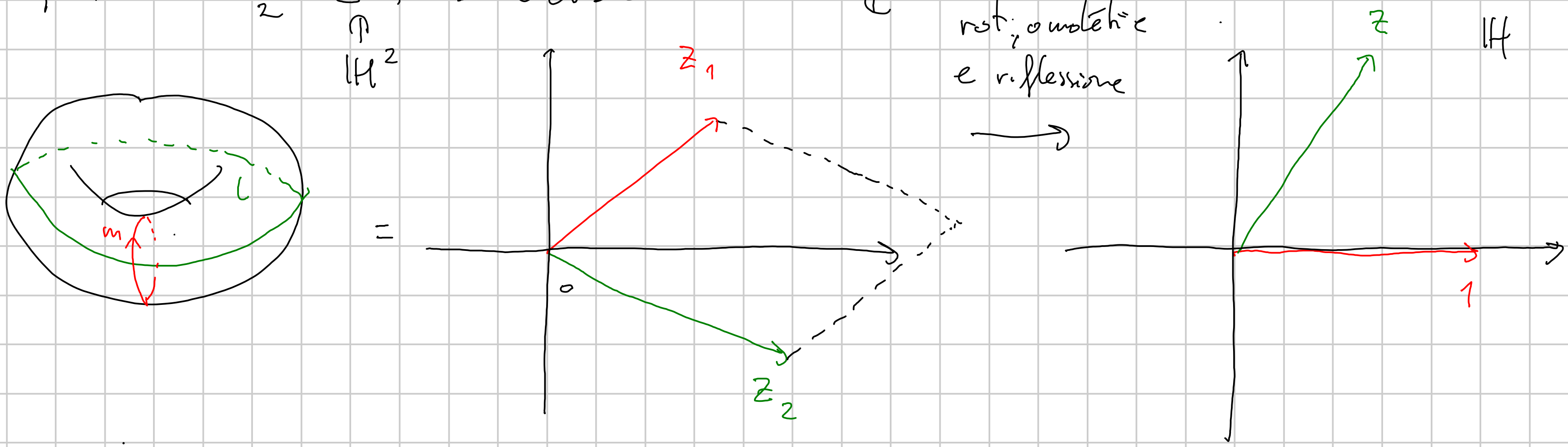
Fissiamo m e l due generatori di $\pi_1(T, *) \overset{``="}{} \Gamma$

La identificazione naturale data dalla metrica piatta

m e l sono identificati a due generatori z_1, z_2 di Γ. A meno di rotazioni, omotetie e riflessioni in $\mathbb{C}$ possiamo supporre

$z_1 = 1$ e $z_2 = z$; $\operatorname{Im}(z) > 0$

$\Uparrow$
$\mathbb{H}^2$



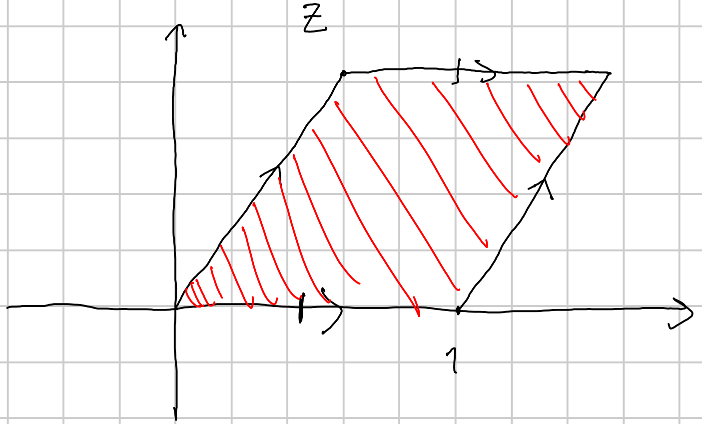
Inoltre $z \in \mathbb{H}^2$ è univocamente determinato dalla classe di omotetia della metrica euclidea.

Ciò definisce una funzione $\mathrm{Teich}(T^2) \to \mathbb{H}^2$ Ben definita (metriche isotope

$g \longrightarrow z$ danno la stessa immagine).

Inversa: $\underset{z}{\overset{\in}{\mathbb{H}^2}} \to \mathrm{Teich}(T^2)$

Identifichiamo T^2 con $\mathbb{C} / \underset{\Gamma}{\underset{\shortparallel}{\langle 1, z \rangle}}$ mandando (m, l) in $(1, z)$.



$\mathrm{Mod}(T^2)$ si "dimentica" dell'identificazione

tra $\pi_1(T^2)$ e $\Gamma < \mathbb{C}^2$

reticolo.

Prop: L'azione di $MCG(T^2)$ su $Teich(T^2)$ è la seguente

$$MCG(T^2) = SL_2(\mathbb{Z}), \qquad Teich(T^2) = \mathbb{H}^2$$

una volta fissati nel

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\in SL(2,\mathbb{Z})} : \underbrace{z}_{\in \mathbb{H}^2} \longmapsto \frac{az-b}{-cz+d}$$

Dim: La metrica g associata a $z \in \mathbb{H}^2$ assegna a T^2

la struttura $\mathbb{C}/\Gamma$, con $\Gamma = \langle 1, z \rangle$. $m \to 1$, $l \to z$

$$\varphi \in \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) = MCG(T) \quad \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Nella metrica $\varphi_*(g)$ assegnamo a (m, l) le traslazioni $(d - cz, -b + az)$.

$$\parallel$$

$$(1, z) \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

A meno di rotazioni e omotetie $(d-cz, -b+az) = \left(1, \dfrac{-b+az}{-cz+d}\right)$ $\square$

$$\underset{g}{\boxed{\begin{array}{l} m \longrightarrow 1 \\ L \longrightarrow z \end{array}}} \longrightarrow \underset{\varphi_t(g)}{\boxed{\begin{array}{l} m \longrightarrow 1 \\ L \longrightarrow \dfrac{-b+az}{-cz+d} \end{array}}}$$

$$SL_2(\mathbb{Z}) < SL_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$$